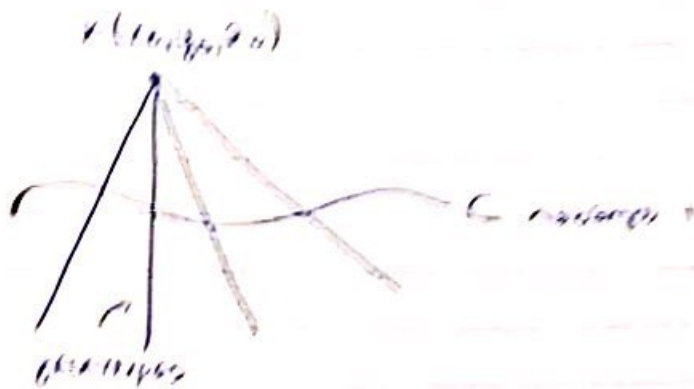


11/5/19

Homework assignment



Objective: Find an expression for $x(u,v,w)$ which satisfies the above
 (i) and (ii) $x(1,0,0,0) = 1$ and $x(0,1,0,0) = 0$
 From (i) $\begin{cases} x(1,0,0,0) = 1 \\ x(0,1,0,0) = 0 \end{cases}$

$$(i) \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-0}{0} = \frac{z-0}{1} = 1$$

$$x(1,0,0,0) = 1$$

From (ii)

$$x = 1 + 10$$

$$y = 0 + 10$$

$$z = 0 + 10$$

$$x(1,0,0,0) = 1$$

$$x(1,0,0,0) = 1 \text{ and } x(0,1,0,0) = 0$$

Discussion

A function which satisfies the above $x(1,0,0,0)$ and $x(0,1,0,0)$ can be written $x(1,0,0,0) = 1$ and $x(0,1,0,0) = 0$ and $x(u,v,w)$ can be written

$$A function, which (i) $x(1,0,0,0) = 1$ and (ii) $x(0,1,0,0) = 0$$$

$x(1,0,0,0)$ and $x(0,1,0,0)$ can be written $x(u,v,w)$ can be written $x(u,v,w)$ can be written

Εστω $P(x_1, y_1, z_1) \in (S)$ με $P \neq K$. Η ευθεία PK έχει
 εξίσωση: $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{\gamma} = t$, όπου $\vec{a} = (a, b, \gamma)$
 $= (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$

$$\frac{x_1 - x_0}{a} = \frac{y_1 - y_0}{b} = \frac{z_1 - z_0}{\gamma} = t$$

$$x_1 = x_0 + ta, \quad y_1 = y_0 + tb, \quad z_1 = z_0 + t\gamma$$

$$F(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) = 0$$

Παράδειγμα

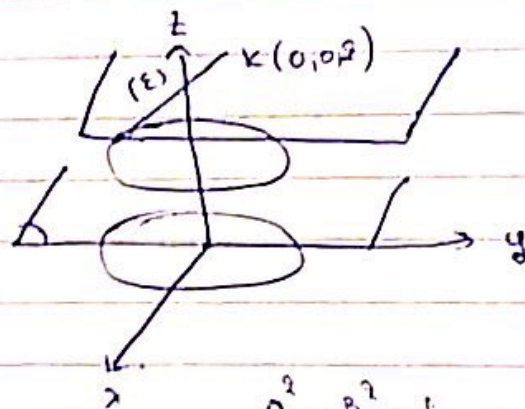
Να βρεθεί η εξίσωση της κυκλικής επιφάνειας με
 κορυφή $K(0,0,1)$ και κοίτη οδοντο (c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases}$

Λύση

$$\text{Εστω } (F): \frac{x-0}{a} = \frac{y-0}{b} = \frac{z-1}{\gamma}$$

όπου $\vec{a} = (a, b, \gamma) \neq \vec{0}$ και $\parallel (F)$

τανω απόδοσή των x, y, z



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, z = 1 \\ \frac{x-0}{a} = \frac{y-0}{b} = \frac{z-1}{\gamma} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, z = 1 \\ \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = -\frac{1}{\gamma} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a^2}{\gamma^2} + \frac{b^2}{\gamma^2} = 1 \\ x = -a/\gamma \\ y = -b/\gamma, z = 1 \end{cases}$$

$$a^2 + b^2 = \gamma^2$$

$$F(a, b, \gamma) = 0$$

$$F(u, v, w) = u^2 + v^2 - w^2$$

$$F(Lu, Lv, Lw) = L^2 \cdot F(u, v, w) \text{ ομογενή συνάρτηση βαθμού } 2.$$

Από την εξίσωση της ~~κυκλικής~~ κυκλικής επιφάνειας είναι

$$F(x-0, y-0, z-1) = F(La, Lb, L\gamma) = L^2 F(a, b, \gamma) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x^2 + y^2 = (z-1)^2}$$

Άσκηση

Τι παριστάνει η εξίσωση $3(x-1)^4 - y^4 = 4(z+2)^4$
 $\Rightarrow F(x-1, y-0, z-1-(-2)) = 0$ ή $F(u, v, w) = 3u^4 - v^4 - 4w^4$

Λύση

- Εξω ότι $F(tu, tv, tw) = t^4 F(u, v, w)$ δηλαδή η F είναι ομογενής 4^{ης} τάξης η επιφάνεια είναι κωνική με κορυφή το σημείο $K(1, 0, -2)$. Σημω το επίπεδο $\pi: z=0$ το οποίο δεν διέρχεται από το $K(1, 0, -2)$



$$\text{Η καμπύλη } (C) : \begin{cases} z=0 \\ 3(x-1)^4 - y^4 = 4(z+2)^4 \end{cases}$$

Άσκηση

Να βρείτε η εξίσωση της κωνικής επιφάνειας με κορυφή $K(6, 9, 12)$ της οποίας οι γενεαίτες εφαπτόνται επιφάνεια (S): $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 5$

Λύση

$$\text{Εξω } (C) : \frac{x-6}{\alpha} = \frac{y-9}{\beta} = \frac{z-12}{\gamma} = t$$

Γενεαίτες της κωνικής επιφάνειας (2)

$$(2) : \begin{cases} x = 6 + t\alpha \\ y = 9 + t\beta \\ z = 12 + t\gamma \end{cases}$$

Αντικθ η εξίσωση με αγγιστο το t
 $(6+t\alpha)^2 + 2(9+t\beta)^2 + 3(12+t\gamma)^2 = 5$ να έλξη

Συνθήκη πρ/α

$$\Leftrightarrow (\alpha^2 + 2\beta^2 + 3\gamma^2)t^2 + (12\alpha + 36\beta + 36\gamma)t + 625 = 0$$

Πρέπει διακρινόμενα $= 0 \Leftrightarrow$

$$(-12\alpha + 36(3 + 7\gamma))^2 - 4(\alpha^2 + 2\beta^2 + 3\gamma^2)625 = 0 \Leftrightarrow F(0, \beta, \gamma) = 0$$

$$a = \frac{x-6}{1}, b = \frac{y-9}{-1}, \gamma = \frac{z-12}{1}$$

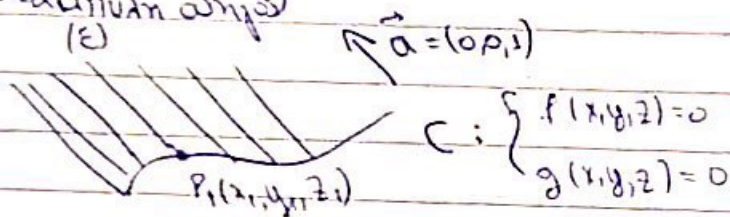
Η εξίσωση της κυλινδρικής επιφάνειας είναι:

$$\left(12 \frac{x-6}{1} + 36 \frac{y-9}{-1} + 1 \frac{z-12}{1}\right)^2 - 4 \left(\left(\frac{x-6}{1}\right)^2 + 2 \left(\frac{y-9}{-1}\right)^2 + 3 \left(\frac{z-12}{1}\right)^2 \right) 625 = 0$$

$$= \left(12(x-6) - 36(y-9) + (z-12)\right)^2 - 4 \left[(x-6)^2 + 2(y-9)^2 + 3(z-12)^2 \right] 625 = 0$$

Κυλινδρικές επιφάνειες

Ορίζεται μια επιφάνεια καλείται κυλινδρική επιφάνεια, αν παραχθεί από ευθεία η οποία κινείται ώστε (i) να είναι παρ/λη προς σταθερή διεύθυνση $\vec{a} = (a, b, \gamma) \neq \vec{0}$ και (ii) τέλεια δοθείσα καμπύλη C (καμπύλη οδηγός)



$$(E) \frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{\gamma}$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί η εξίσωση της κυλινδρικής επιφάνειας της οποίας οι γενευρέτες είναι $(\vec{a} = (1, 2, -1))$ και έχει καμπύλη οδηγό την $C: \begin{cases} 3x^2 + 5y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

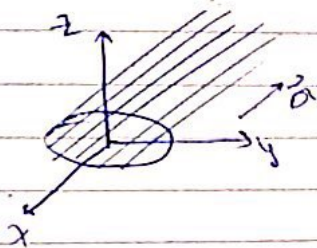
Λύση

Εστω τυχαία γενευρέτα (E) $\frac{x-x_1}{1} = \frac{y-y_1}{2} = \frac{z-z_1}{-1}$, όπου $P(x_1, y_1, z_1)$ είναι το γενείο τούτης της (E) με την C και $K: \begin{cases} 3x_1^2 + 5y_1^2 = 1 \\ z_1 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x_1 + t \\ y = y_1 + 2t \\ z = -t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x - t \\ y_1 = y - 2t \\ z_1 = -t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x + 2 \\ y_1 = y - 2t \\ z_1 = -2 \end{cases}$$

Απάντηση

Η εξίσωση της κυλινδρικής επιφάνειας είναι
(A) $3(x+z)^2 + 5(y+2z)^2 = 1$



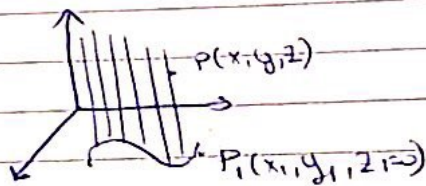
$$(C): \begin{cases} \frac{z^2}{(\frac{1}{\sqrt{3}})^2} + \frac{y^2}{(\frac{1}{\sqrt{5}})^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+z=0 \\ y+2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(x+z, y+2z)=0 \\ F(u,v)=3u^2+5v^2-1 \end{cases}$$

Επίσημη απάντηση

Να βρεθεί η εξίσωση της κυλινδρικής επιφάνειας της οποίας οι γενετρίδες είναι $\parallel OZ$ και η καμπύλη οδηγός είναι (C) :

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$$



$$(E) \frac{x-x_1}{0} = \frac{y-y_1}{0} = \frac{z-(z_1=0)}{1} \Rightarrow \begin{cases} x=x_1 \\ y=y_1 \end{cases}$$